

Πρώτο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 ΩΡΕΣ

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(E) \quad y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = \begin{cases} -2x - \frac{4}{x}, & x \in [1, 2] \\ x^2, & x \in (2, 4] \end{cases}, \quad y(1) = 1$$

- (i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[1, 4]$  η οποία να ικανοποιεί το παραπάνω π.α.τ.
- (ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $[1, 4]$  που ικανοποιεί το εν λόγω πρόβλημα αρχικών τιμών.

Θέμα 2

Να αποδείξετε ότι όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$(E) \quad y'(x) + y(x)e^{x^2+x+1} = \frac{x \sin x}{x^2 + 1}, \quad x \geq 0$$

τείνουν προς το 0, για  $x \rightarrow +\infty$ .

Θέμα 3

Για τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad y'(x) - (5x^4 + 1)y(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2 + 3},$$

να αποδείξετε ότι η μοναδική φραγμένη λύση της εξίσωσης στο  $[0, +\infty)$  δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 s}{s^2 + 3} e^{\int_s^x (5u^4+1)du} ds, \quad x \geq 0.$$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**